

Γεννήτρια ακολουθίας Farey

Μάθημα: Γλώσσες Περιγραφής Υλικού I (CST304 / 2009-2010)

Διδάσκων: Νικόλαος Καββαδίας

nkavn@uop.gr

30/03/2010

Αντικείμενο της εργασίας

Αντικείμενο αυτής της εργασίας είναι η περιγραφή σε Verilog HDL ενός κυκλώματος για τη γέννηση της ακολουθίας Farey (Farey series) τάξης m (F_m). Η ακολουθία Farey αποτελεί την ακολουθία των μη-μειώσιμων ρητών αριθμών που περιλαμβάνονται ανάμεσα στο 0 και στο 1. Οι αριθμοί είναι της μορφής n/d , με $0 \leq n \leq d < m$, και παράγονται κατά αύξουσα σειρά.

Οι διαδοχικοί αριθμοί της ακολουθίας Farey, τάξης m , συνδέονται σύμφωνα με την αναδρομική σχέση

$$f_{i+1} = ((d_{i-1} + m) / d_i) * f_i - f_{i-1}$$

όπου $f_1 = 0/1$ και $f_2 = 1/m$.

Στον Πίνακα 1 δίνονται οι ακολουθίες Farey, για τις τάξεις 1 ως 8.

Πίνακας 1: Ακολουθίες Farey για τις τάξεις 1 ως 8.

Τάξη	Όροι
1	0/1
2	0/1, 1/2, 1/1
3	0/1, 1/3, 1/2, 2/3, 1/1
4	0/1, 1/4, 1/3, 1/2, 2/3, 3/4, 1/1
5	0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1
6	0/1, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 1/1
7	0/1, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 1/1
8	0/1, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 2/7, 1/3, 3/8, 2/5, 3/7, 1/2, 4/7, 3/5, 5/8, 2/3, 5/7, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 1/1

Ο σχεδιασμός της γεννήτριας ακολουθίας Farey, προτείνεται να βασιστεί στον εξής απλό αλγόριθμο, ο οποίος λειτουργεί υπολογίζοντας κάθε διαδοχικό όρο με βάση τους δύο προηγούμενούς του, με βάση την ιδιότητα του διάμεσου ρητού (mediant rational number). Αν a/b και c/d είναι δύο διαδοχικοί όροι, τότε ο επόμενος όρος, δηλ. ο άγνωστος p/q , ικανοποιεί τη σχέση: $c/d = (a+p)/(b+q)$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει k για το οποίο είναι: $k*c = a + p$, $k*a = b + q$, οπότε $p = k*c - a$ και $q = k*d - b$. Ο k θα είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος ο οποίος είναι μικρότερος ή ίσος από $(n+b)/d$.

Ο ψευδοκώδικας του Σχήματος 1, υλοποιεί τη γεννήτρια ακολουθίας Farey, τάξης m . Να σημειωθεί ότι οι αναθέσεις που χωρίζονται με κόμμα “,”, θεωρείται ότι εκτελούνται παράλληλα, και συνεπώς οι τιμές των a , b , c , d στο δεξί μέλος, είναι οι “παλιές” τιμές, οι οποίες διαβάζονται στην αρχή του τρέχοντος κύκλου.

```

// Initialize a, b, c, d for computing the ascending Farey sequence
a := 0;
b := 1;
c := 1;
d := m;

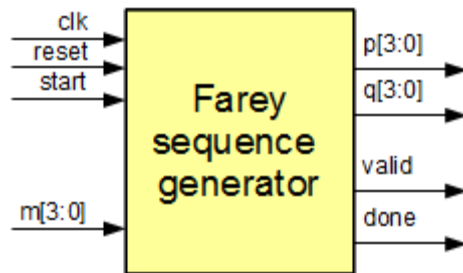
// Compute the subsequent terms of the Farey sequence
while (c < m) loop
  k := (m + b) / d;
  a := c,
  b := d,
  c := k * c - a,
  d := k * d - b;
  p := c;
  q := d;
endwhile

```

Σχήμα 1: Ψευδοκώδικας για τον υπολογισμό της ακολουθίας Farey τάξης m.

Το κύκλωμα θα δέχεται ως είσοδο το διάνυσμα m, εύρους 4 bit, και θα παράγει στην έξοδό του τον αριθμητή (p) και τον παρονομαστή (q) κάθε όρου της ακολουθίας Farey. Η έξοδος σημαίας valid είναι 1, όταν παράγεται ένας νέος όρος της ακολουθίας Farey, ενώ η σημαία done γίνεται 1 με το πέρας της όλης διαδικασίας (δηλ. μετά την παραγωγή του όρου 1/1). Η είσοδος n θα πρέπει να αποθηκεύεται σε εσωτερικό καταχωρητή.

Ενδεικτική διεπαφή του κυκλώματος δίνεται στο Σχήμα 2, και οι θύρες εισόδου και εξόδου περιγράφονται αναλυτικά στον Πίνακα 2.



Σχήμα 2: Η διεπαφή της γεννήτριας ακολουθίας Farey.

Πίνακας 2: Θύρες εισόδου και εξόδου για το κύκλωμα.

Θύρα	Εύρος bit	Κατευθυντικότητα	Περιγραφή
clk	1	Είσοδος	Είσοδος ρολογιού
reset	1	Είσοδος	Επανατοποθέτηση
start	1	Είσοδος	Έναρξη λειτουργίας του κυκλώματος
m	4	Είσοδος	Τάξη της ακολουθίας Farey
p	4	Είσοδος	Αριθμητής του τρέχοντος όρου της ακολουθίας
q	4	Έξοδος	Παρονομαστής του τρέχοντος όρου της ακολουθίας
valid	1	Έξοδος	Σημαία υπόδειξης νέου όρου της ακολουθίας
done	1	Έξοδος	Σημαία υπόδειξης του τερματισμού λειτουργίας της παραγωγής της ακολουθίας τάξης m

Παράδοση και βαθμολόγηση της εργασίας

Στην εργασία του μαθήματος, ο φοιτητής καλείται

- να παραδώσει την περιγραφή του κυκλώματος που σχεδίασε σε Verilog HDL
- να αναπτύξει σε κείμενο την περιγραφή της λειτουργίας του κυκλώματος
- να παρουσιάσει αποτελέσματα (π.χ. κυματομορφές, αρχεία εισόδου/εξόδου) τα οποία να αποδεικνύουν τη σωστή λειτουργία του κυκλώματος

Η εργασία παραδίδεται σε τυπωμένη μορφή (με το συνολικό κώδικα Verilog HDL) και υποβάλλεται σε ηλεκτρονική μορφή (PDF της εργασίας + αρχεία κώδικα) στο email του διδάσκοντα. Οι φοιτητές μπορούν να παραδώσουν τις εργασίες τους το αργότερο μέχρι και την ημέρα των εξετάσεων της περιόδου Ιουνίου-Ιουλίου 2010. Εργασία η οποία θα παραδοθεί μετά το πέρας αυτής της ημερομηνίας, δεν θα βαθμολογηθεί ώστε να ληφθεί υπόψη για τις εξετάσεις της περιόδου Ιουνίου-Ιουλίου.

Μια εργασία βαθμολογείται με άριστα το 1.25. Μη εμπρόθεσμη παράδοση εργασίας συνεπάγεται το βαθμό μηδέν (0).

Η εργασία του μαθήματος είναι υποχρεωτική.